数理解析研究所講究録
第 627 巻 1987 年 98-101

Lusinの面積積分と最大関数

東北大学教養部　金子 誠 (Makoto Kaneko)

u は、上半平面 $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ で調和な関数とする。これに対して、その Lusin の面積積分 $A_\alpha u$ は

$$(A_\alpha u)^2(x) = \int_{\Gamma_\alpha(x)} |(\nabla u)(y,s)|^2 s^{1-n}\, dy\, ds$$

で定義される。ここで、$\Gamma_\alpha(x) = \{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \mid |x-y| < \alpha s\}$, そして、$\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ の点は (x,t), (y,s) $(x, y \in \mathbb{R}^n;\ t, s \in (0,\infty))$ のように表示する。一方、最大関数 $N_\alpha u$ は、次のように定義する。

$$(N_\alpha u)(x) = \sup\{\, |u(y,s)| \mid (y,s) \in \Gamma_\alpha(x) \,\}.$$

これらの間には、ノルム同値 $\| N_\alpha u \|_p \approx \| A_\alpha u \|_p$ $(0 < p < \infty)$ のあることは良く知られている。$A_\alpha u$ を $N_\alpha u$ で評価する事を、もう少し精密に考えてみる。

$|\nabla u|^2 = \Delta|u|^2/2$ であるから、$(A_\alpha u)^2(x) = \int_{\Gamma\alpha(x)} \Delta|u|^2(y,s)\, s^{1-n}\, dyds/2$ となり、さらに、$|u|^2$ は劣調和関数である。そこで $|u|^2$ を劣調和関数で置き換えたものを考えてみようというのが、McConnell の考えである。McConnell の結果は 内山氏により改良された。それをもう少し改良することができる。

$A = (a_{jk})$ を $(n+1)$-次元の複素正方行列とし、$b_1, \ldots, b_{n+1}$ は複素数とする。そして、微分演算子 L を次で定義する。

$$L = \sum_{j,k=1}^{n+1} a_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n+1} b_j \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

ただし、x_{n+1} は $(n+1)$-番目の変数 t をあらわす。A が非負エルミート行列で、$b_1, \ldots, b_{n+1}$ が実数のとき、次のことがわかる。

$$u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}_+),\ Lu = 0 \ \Rightarrow\ L|u|^2 = ([A + \bar{A}]\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}) \geqq 0.$$

<u>Example 1</u>.　$\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ $\Rightarrow$ $\Delta|u|^2 = 2|\nabla u|^2$.

Example 2. $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ において $\Delta_x u_0 - \partial u_0/\partial t = 0$ とする。そして、$u(x,t) = u_0(x, t^2/4\pi)$ と置くと、$\Delta_x u - 2\pi t^{-1}\partial u/\partial t = 0$, $(\Delta_x - 2\pi t^{-1}\partial/\partial t)|u|^2 = 2|\nabla_x u|^2$. Calderón-Torchinsky は

$$\int_{\Gamma_a(x)} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} u(y,t)\right|^2 t^{1-n}\, dy\, dt \quad (j = 1,\dots,n)$$

を調べている(もっと一般な nonisotropic な場合を扱っている)。

Example 3. McConnell は Example 1 に関して次のような面積積分を研究している。v は $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ で非負劣調和関数とする。このとき密度が Δv である正測度 μ (Riesz measure) があるので、これを用いて面積積分 $S_\alpha v$ を

$$(S_\alpha v)(x) = \int_{\Gamma_\alpha(x)} s^{1-n}\, d\mu(y,s)$$

と定義した。最初に導入した $A_\alpha u$ との関係は、$(A_\alpha u)^2 = S_\alpha |u|^2/2$ である。

以上の事を背景として次のような定義をする。

v は $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ 上の局所可積分な関数であって、超関数の意味の Lv が正のボレル測度 μ_{Lv} となるものとする。このような v に対して $S_\alpha v$ を

$$(S_\alpha v)(x) = \int_{\Gamma_\alpha(x)} s^{1-n}\, d\mu_{Lv}(y,s)$$

と定義する。一方、最大関数 $N_\alpha v$ は次で定義する。

$$(N_\alpha v)(x) = ess\,sup\,\{\, |v(y,s)| \mid (y,s) \in \Gamma_\alpha(x) \,\}.$$

これが可測関数となることは検証できる。これらの間に次のような good λ inequality が成立する。

定理。 $0 < \alpha < \beta < \infty$ とすれば、すべての $\gamma > 1$ に対して、

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ (S_\alpha v)(x) > \gamma,\ (N_\beta v)(x) \leqq 1 \right\} \right|$$

$$\leqq c_1\, exp(-c_2\gamma) \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ (S_{2\alpha} v)(x) > 1 \right\} \right|$$

となる正定数 $c_j = c_j(n, \alpha, \beta, L)$ $(j = 1, 2)$ が存在する。

技術的な困難さを避けるために、次のようなものを考えておく。$B_n(O,R)$ を、$\mathbb{R}^n$ における、原点を中心、半径 R の球とし、$T_R = B_n(O,R) \times (1/R, R) \subset \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ とおき、

$$(S_a(T_R)v)(x) = \int_{T_R \cap \Gamma_a(x)} s^{1-n}\, d\mu_{Lv}(y,s)$$

とおく。すると、定理において、$S_a v$, $S_{2a} v$ を $S_a(T_R)v$, $S_{2a}(T_R)v$ で置き換えられる。このことから次の結果が得られる。

系　$0 < a, \beta < \infty$, $0 < p < \infty$ に対して $\| S_a v \|_p \leqq C \| N_\beta v \|_p$.

系　$0 < a < \beta < \infty$, $0 < p < \infty$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} exp\left\{ c\,\frac{(S_a v)(x)}{(N_\beta v)(x)} \right\} [(S_a v)(x)]^p\, dx \leqq C \| S_a v \|_p^p$$

定理の証明の概略を述べる。その証明においては次の補題が重要な役割を演じる。$E \subset \mathbb{R}^n$ にたいして $W_a(E)$ を次で定義する。

$$W_a(E) = \bigcup \left\{ \Gamma_a(x)\ ;\ x \in E \right\}.$$

補題　$0 < a < \beta < \infty$ とし

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n\ ;\ (N_\beta v)(x) \leqq 1 \right\}$$

として、$\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 上の測度 m を

$$m(W) = \int_{W_a(E) \cap W} t\, d\mu_{Lv}(x,t) \quad (W \subset \mathbb{R}^{n+1}_+)$$

で定義すれば、m は Carleson measure であって

$$\| m \|_C = sup \left\{ \frac{m(I \times (0, |I|^{1/n})}{|I|}\ ;\ I \subset \mathbb{R}^n \text{ は立方体} \right\} \leqq C(n, a, \beta, L).$$

次に、$m_R(W) = m(W \cap T_R)$ とおき $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を $0 \leqq \phi \leqq 1$, $\phi(x) = 1$ ($|x| \leqq 1$), $\phi(x) = 0$ ($|x| \geqq 2$) なるものとする。そして、

$$K_t(x) = t^{-n}\, \phi(x/at)$$

とおけば、$x \in E$ に対しては

$$\left\{S_a(T_R)v\right\}(x) \leqq \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} K_s(x-y)\, dm_R(y,s) \leqq \left\{S_{2a}(T_R)v\right\}(x)$$

が成立する。真ん中の項は、速度 m_R の balayage であり、$m_R \leqq m$ であるから、m_R は Carleson 測度となり、

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} K_s(x-y)\, dm_R(y,s)$$

は BMO-関数となる。これに John-Nirenberg-村井-内山 の不等式を適用すれば、求める分布不等式が得られる。

参考文献。

[1] A.P. Calderón and A. Torchinsky, Parabolic maximal functions associated with a distribution, Adv. in Math. 16 (1975), 1-64.

[2] C. Fefferman and E.M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972), 137-193.

[3] M. Kaneko, Estimates of the area integrals by the non-tangential maximal functions, to appear in Tôhoku Math. J.

[4] A. Uchiyama, On McConnel's inequality for functionals of subharmonic functions, to appear in Pacific J. Math.